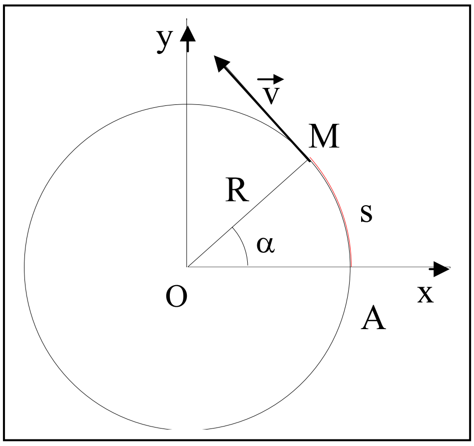
CINEMATIQUE du SOLIDE en ROTATION

1- DESCRIPTION D'UN MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

Un point quelconque d'un solide tournant autour d'un axe fixe reste toujours à la même distance de l'axe de rotation. Que le mouvement soit uniforme ou varié, la trajectoire de tous points du solide est donc un cercle. C'est pourquoi le mouvement circulaire est étudié en détail.

1.1 REPERAGE DE LA POSITION D'UN POINT D'UN SOLIDE EN ROTATION



En **coordonnées cartésiennes**, l'équation de la trajectoire de **M** est données par :

$$\mathbf{y^2 + x^2 = R^2 \quad \text{donc} \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}}$$

En **coordonnées polaires**, la position du point **M** est donnée par le rayon R = OM et l'angle **α** = $\widehat{\mathbf{MOA}}$

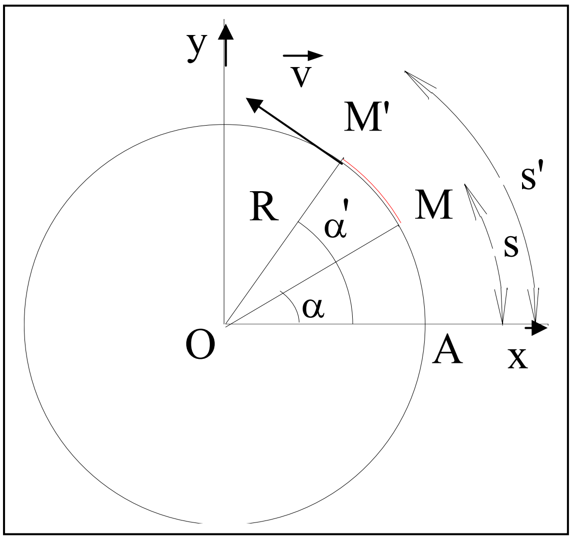
L'utilisation d'un repère cartésien dans cette situation aboutit a des équations trop complexes. Donc on préfère utiliser un autre système de repérage : les **coordonnées polaires**.

On définit : - **abscisse curviligne** $s = \overset{\frown}{AM}$ (m)

- **abscisse angulaire** $\alpha = \widehat{MOA}$ (rad)

$$\boxed{s = \mathbf{R} \,.\, \alpha}$$ avec R en m et α en rad

1.2 VITESSE LINEAIRE, VITESSE ANGULAIRE



Par définition : $\boxed{\Delta S = S' - S}$

La **vitesse linéaire** est définie par

$v = \Delta s / \Delta t$ en $m.s^{-1}$

Le **vecteur vitesse instantanée** à pour direction la tangente au cercle, au point **M** (il est donc toujours perpendiculaire au rayon R)

La **vitesse angulaire** (pulsation)

$\omega = \Delta\alpha / \Delta t$ $rad.s^{-1}$

(autre notation $\omega = \dot{\alpha}$)

Relation entre vitesse linéaire d'un point et vitesse angulaire :

Comme $s = R\alpha$ on a $\Delta s = R\Delta\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{v = R\omega}$$

avec **v** en $m.s^{-1}$
R en m
ω en $rad.s^{-1}$

Vitesse linéaire = Rayon * vitesse angulaire

REM. : à vitesse angulaire ω constante, plus un point est éloigné de l'axe, plus sa vitesse linéaire est grande, donc son énergie cinétique augmente aussi, d'où un danger de dislocation de l'objet.

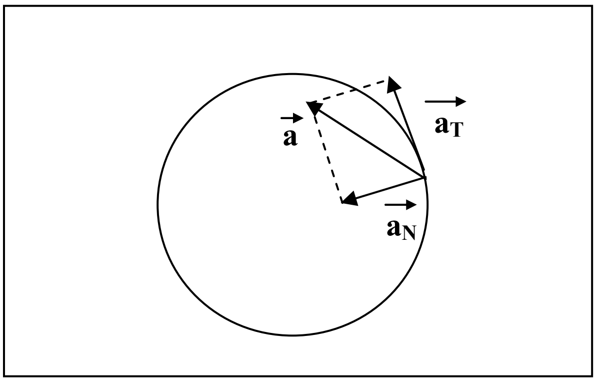
1.3 ACCELERATION

Le **vecteur accélération** est défini par la relation $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, le **vecteur accélération** peut prendre diverses orientations, mais il sera **toujours orienté vers l'intérieur du cercle**.
Pour simplifier son étude, on le décompose en deux composantes :

- **accélération tangentielle** : $\vec{a}_T$ (porté par la tangente au cercle au point considéré)
- **accélération normale**(ou radiale) : $\vec{a}_N$ (porté par le rayon OM)

$\boxed{\text{Le vecteur accélération totale est donné par : } \vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T}$



Le repère utilisé pour décrire le vecteur accélération s'appelle la **base de Frenet**

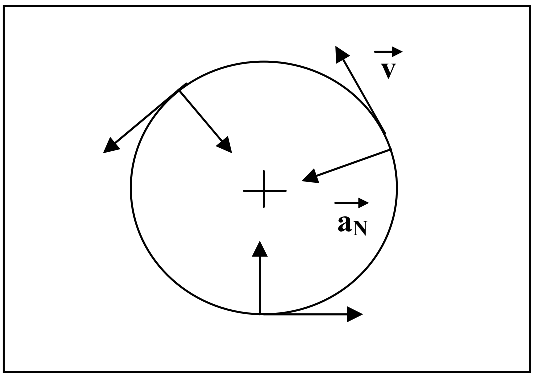
La valeur de l'**accélération tangentielle** est : $\boxed{a_T = \Delta v/\Delta t = R\Delta\omega/\Delta t = R\,\ddot{\alpha}}$ avec a_T en $m.s^{-2}$

La valeur de l'**accélération normale** est donnée par $\boxed{a_N = v^2/R = R\omega^2}$ (car $v = R\omega$)

La valeur de l'**accélération totale** est bien sûr : $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

Autre notation pour l'**accélération angulaire** $\ddot{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dot{\omega}$ (en $rad.s^{-1}$)

2- Mouvement circulaire uniforme



Le mouvement circulaire uniforme est caractérisé par **v = Cste**
mais le vecteur vitesse n'est pas constant, puisque sa direction varie) donc **$a_T = \Delta v/\Delta t = 0$**

mais il y a toujours une accélération normale **$a_N = v^2/R = cste$**

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme ⇔ $\vec{a} \perp \vec{v}$
(la réciproque est vraie également)

REM 1 : Ceci est dû à l'existence d'une force centripète indispensable pour maintenir le mobile sur sa trajectoire circulaire. Ce point sera revu lors de l'étude dynamique.

REM 2 : Un point d'un solide en mouvement circulaire uniforme repasse par la même position à intervalles de temps réguliers, c'est un **mouvement périodique.**

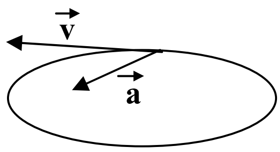
Cet intervalle de temps est appelé **période**, il est noté $T = 2\pi / \omega$ (**T** en s et ω en rad/s)

La **fréquence** est notée **$f=1/T$** (avec **f** en Hz et T en s)

La **pulsation** est donnée par **$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$**

3- Mouvement circulaire NON-uniforme

D'une façon générale le vecteur vitesse et le vecteur accélération ne sont pas perpendiculaires
Le vecteur accélération est toujours orienté vers "l'intérieur" de la courbe de la trajectoire (vers le centre de courbure).



Si $\vec{a}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{v}$, alors on **ne peut pas** avoir un mouvement circulaire uniforme : **a_T** n'est pas nul et le mouvement est alors il est varié.

Si **a_T** est constant donc $\ddot{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ est **constant**,
alors le mouvement est **circulaire uniformément varié**

4- CINEMATIQUE DU MOUVEMENT DE ROTATION

4.1- Equation horaire pour un mouvement circulaire uniforme

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par une **vitesse angulaire ω constante**. Par conséquent l'**accélération angulaire est nulle.**

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{\alpha} = 0 \\ &\omega = Cste \\ &\alpha = \omega.t + \alpha_0 \end{aligned}}$$

4.2- Equations horaires d'un mouvement circulaire uniformément varié

Un mouvement circulaire peut avoir une accélération quelconque, un cas particulier important et facile à étudier est le mouvement circulaire **uniformément varié.**
Par définition, son **accélération angulaire est constante**.
Il en découle les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{\alpha} = Cste \\ &\omega = \ddot{\alpha}.t + \omega_0 \\ &\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}.t + \omega_0.t + \alpha_0 \end{aligned}}$$

Propriété importante du mouvement circulaire uniformément varié :

$$(\omega^2 - \omega_0^{\,2}) = 2.\ddot{\alpha}.(\alpha - \alpha_0)$$

Démonstration :

$$\omega = \ddot{\alpha}.t + \omega_0 \quad => \quad t = \frac{(\omega - \omega_0)}{\ddot{\alpha}}$$

remplaçons **t** par cette expression dans l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}.t + \omega_0.t + \alpha_0$

$$(\alpha - \alpha_0) = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}\left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\ddot{\alpha}}\right]^2 + \omega.\frac{(\omega - \omega_0)}{\ddot{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \qquad (\alpha - \alpha_0) = \frac{(\omega - \omega_0)}{\ddot{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\ddot{\alpha}\left[\frac{(\omega - \omega_0)}{\ddot{\alpha}}\right] + \omega\right]$$

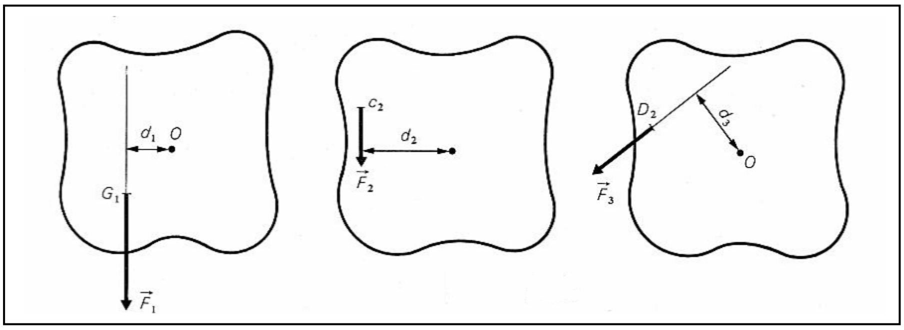
$$\Rightarrow \qquad (\alpha - \alpha_0) = \frac{(\omega - \omega_0)}{2.\ddot{\alpha}}(\omega + \omega_0) \qquad \Rightarrow \qquad (\alpha - \alpha_0) = \frac{(\omega^2 - \omega_0^{\,2})}{2.\ddot{\alpha}}$$

et finalement $$(\omega^2 - \omega_0{}^2) = 2.\ddot{\alpha}.(\alpha - \alpha_0)$$

DYNAMIQUE de la ROTATION

1- Introduction : moment d'une force

L'effet d'une force sur la rotation d'un solide pouvant tourner par rapport à un axe Δ s'évalue en calculant le **moment de la force par rapport à cet axe** :



Le **moment d'une force localisée par rapport à l'axe Δ** (passant par O) est le produit de l'intensité **F** de la force par le bras de levier **d** (distance entre la droite d'action de la force et l'axe de rotation) :

$$\mathbf{M_{\Delta}(\vec{F}) = F.d}$$

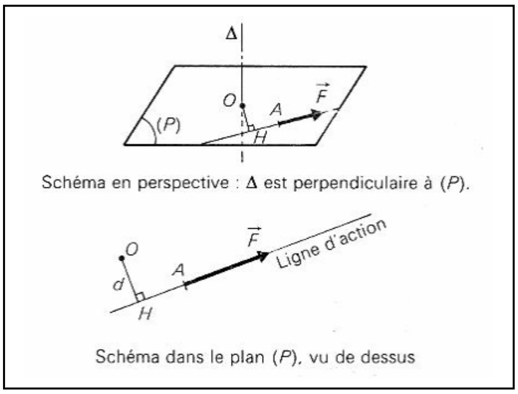


Schéma en perspective : Δ est perpendiculaire à (P).

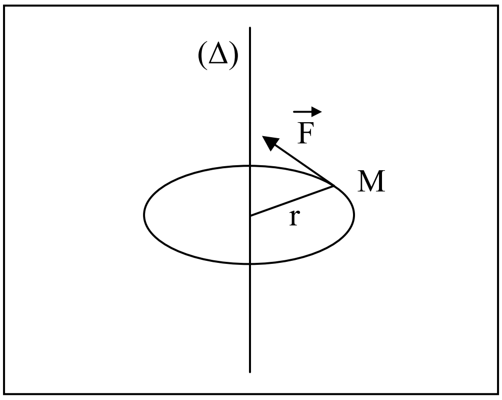
Schéma dans le plan (P), vu de dessus

Remarque :
Si la droite d'action de la force passe par l'axe alors d = 0 et son moment est nul .
Ceci n'est pas étonnant car alors la force n'a aucun effet sur la rotation du solide.
Il en sera de même pour une force dont la droite d'action est parallèle à l'axe de rotation.

En général on donne une **valeur algébrique** au moment d'une force :

- on définit un sens positif de rotation (le sens trigonométrique direct en général)
- si la force tend à faire tourner le solide dans le sens positif, alors son moment sera positif.
- si la force tend à faire tourner le solide dans le sens négatif, son moment sera compté négativement.

2- Dynamique d'un point matériel en rotation autour d'un axe



On applique une force $\vec{F}$ à l'objet ponctuel **M**. pouvant tourner autour d'un axe fixe **Δ**.
On peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

Dans le cas d'une rotation, l'effet de la force est caractérisé par son moment par rapport à **Δ** :

$$M(\vec{F}) = F_T.r$$

F_T est la composante de $\vec{F}$ selon la tangente à la trajectoire circulaire, au point M

donc : $$F_T.r = m.a_T.r$$

$$M(\vec{F}) = m.a_T.r \qquad \text{avec} \qquad a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = r.\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r.\ddot{\alpha}$$

d'où $$M(\vec{F}) = m.r^2.\ddot{\alpha}$$

<u>**Par définition**</u>, le terme **$m.r^2$** est appelé **moment d'inertie** de l'objet ponctuel **M** par rapport à l'axe Δ.

$$J_\Delta = \frac{M(\vec{F})}{\ddot{\alpha}} \qquad J_\Delta \text{ en } kg.m^2$$

Nous pouvons donc écrire la **relation fondamentale de la dynamique pour un point matériel en rotation autour d'un axe fixe Δ :**

$$\boxed{M(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\alpha}}$$

3- Généralisation : solide en rotation par rapport à un axe Δ

Dans le cas d'un **solide** quelconque en rotation par rapport à un axe Δ, on admettra la généralisation de la relation précédente :

$$\sum M(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\alpha}$$

C'est à dire :
La **somme algébrique des moments des forces appliquées** au solide est égale au produit du **moment d'inertie** du solide par son **accélération angulaire**.

REM 1 : Si **la somme algébrique des moments des forces appliquées est constante**, alors l'accélération angulaire sera aussi constante.
Le mouvement sera donc **circulaire uniformément varié.**

REM 2 : Si **la somme algébrique des moments des forces appliquées est nulle**, alors l'accélération angulaire sera nulle aussi et le solide tournera à vitesse constante.
Le mouvement sera **circulaire uniforme**.

4- Moment d'inertie d'un solide

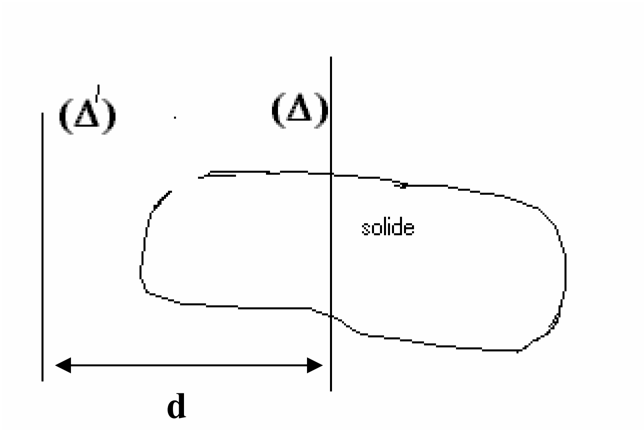
Le **moment d'inertie** d'un solide dépend de sa masse m et de sa forme. Le calcul de la valeur du moment d'inertie d'un solide peut être très compliqué, sa valeur sera alors toujours donnée dans l'énoncé du problème.

Le document en annexe donne l'expression du moment d'inertie pour quelques solides usuels.

REM 1 : On retiendra que le moment d'inertie d'un solide formé de plusieurs parties est la somme des moments d'inerties des différentes parties.

$$\mathbf{J}_{\Delta Total} = \mathbf{J}_{\Delta 1} + \mathbf{J}_{\Delta 2} + \mathbf{J}_{\Delta 3} + \ldots$$

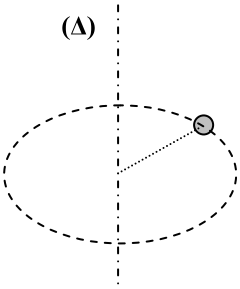
REM 2 : il arrive souvent que l'on connaisse le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe **Δ**, mais que le solide tourne en fait par rapport à un autre axe **Δ' parallèle** à **Δ.**
Dans ce cas le **théorème de HUYGHENS** permet de calculer le nouveau moment d'inertie :



$$\boxed{\mathbf{J}_{\Delta'} = \mathbf{J}_{\Delta} + \mathbf{M.d^2}}$$

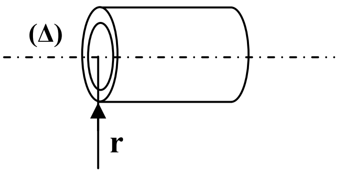
$\mathbf{J}_{\Delta'}$ = moment d'inertie/Δ'
$\mathbf{J}_{\Delta}$ = moment d'inertie/ Δ
M = masse totale du solide
d = distance entre les deux axes de rotation **Δ'** et **Δ**

MOMENTS D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES.



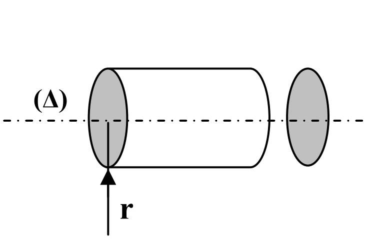
Masse ponctuelle tournant autour d'un axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = m.r^2$$



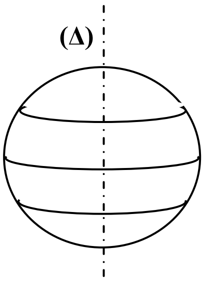
Manchon cylindrique de faible épaisseur tournant autour de son axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = m.r^2$$



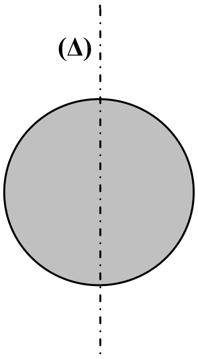
Cylindre ou **disque plein** tournant autour de son axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{2} m.r^2$$



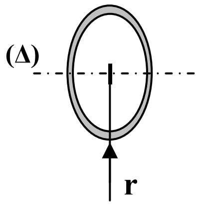
Sphère pleine tournant autour d'un diamètre (Δ) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{2}{5} m.r^2$$



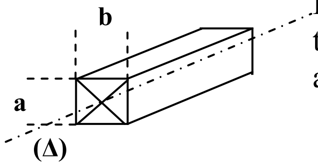
Disque plat tournant autour d'un diamètre (Δ) :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{4} m.r^2$$



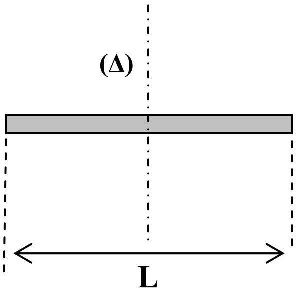
Anneau tournant autour d'un axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = m.r^2$$



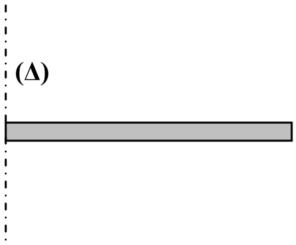
Parallélépipède rectangle tournant autour de son axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



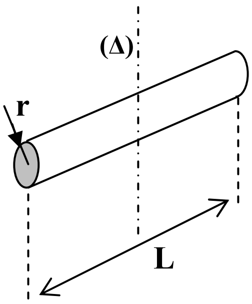
Barre rectiligne de faible section tournant autour d'un axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{12} m.L^2$$



Barre rectiligne de faible section tournant autour d'un axe Δ à son extrémité :

$$J_{(\Delta)} = \frac{1}{3} m.L^2$$

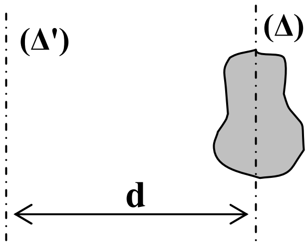


Barre cylindrique tournant autour d'un axe Δ :

$$J_{(\Delta)} = m.\left(\frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$$

Théorème de HYUGHENS :

$$J_{(\Delta')} = J_{(\Delta)} + m.d^2$$



UNITES : J(Δ) en **kg.m²** les **masses m** sont en **kg** toutes les **distances r,a,b, L** en **m**

ETUDE ENERGETIQUE de la ROTATION

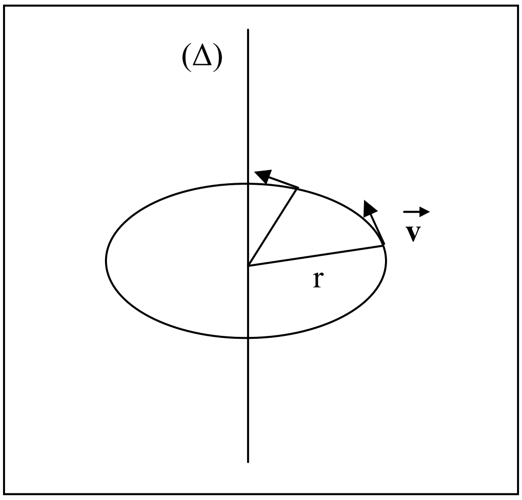
ENERGIE CINETIQUE – TRAVAIL des FORCES

1- Energie cinétique d'un solide en rotation

1.1. Cas d'un objet ponctuel

Par définition, l'énergie cinétique d'une masse ponctuelle se déplaçant avec une vitesse v est :

$$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} m.v^2} \qquad \text{v = vitesse linéaire}$$



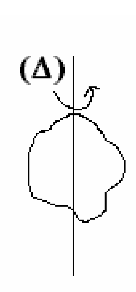
Dans le cas d'une rotation, nous avons **v = r.ω** donc l'expression de Ec devient :

$$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} m.(r\omega)^2 = \frac{1}{2} (m.r^2).\omega^2}$$

donc finalement $\mathbf{E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}.\omega^2}$

L'énergie cinétique s'exprime en Joules (J)

1.2 Cas d'un solide quelconque en rotation par rapport à Δ



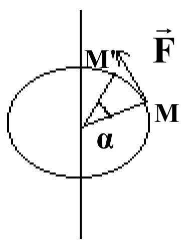
Pour un solide quelconque en rotation par rapport à un axe Δ fixe, nous gardons la même définition de l'énergie cinétique :

$$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}.\omega^2}$$

J_{Δ} est le moment d'inertie du solide / Δ

2- Travail d'une force agissant sur un solide en rotation

Sous l'action de la force $\vec{F}$, le point M se déplace en M'
Nous supposerons que $\vec{F}$ reste toujours tangent au cercle (trajectoire de M)
Le travail de $\vec{F}$ au cours de ce déplacement :



$$\mathbf{W_{M\to M'}(\vec{F}) = F.\overset{\frown}{MM'} = F.(r.\alpha)}$$

donc

$$\mathbf{W_{M\to M'}(\vec{F}) = (F.r).\alpha = M_{\Delta}(\vec{F}).\alpha}$$

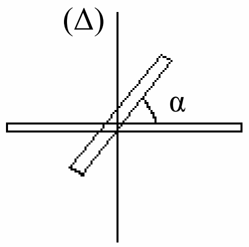
Le travail de la force au cours de la rotation d'angle α est donc :

$$\mathbf{W_{M\to M'}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}).\alpha}$$

REM : Lorsque l'on a **un couple de force**, le travail de ce couple pour une rotation d'angle **α** sera donné par une expression identique :

$$\mathbf{W_{M\to M'}}(C) = \mathbf{M_{\Delta}}(C)\mathbf{.\alpha}$$

Cas du couple de torsion :



Le moment du couple de torsion d'un fil ou d'un barre de torsion est donné par :

$$\mathbf{M(C) = C.\alpha}$$

C : constante de torsion
α : angle de torsion

Le travail de ce couple de torsion est donné par :

$$\mathbf{W_{0\to\alpha}(C) = -\frac{1}{2}C.\alpha^2}$$ Il s'agit d'un travail résistant W < 0

Dans le cas plus général d'une torsion du fil à partir d'un angle $\boldsymbol{\alpha_1}$ jusqu'à un angle $\boldsymbol{\alpha_2}$ **,** le travail du couple de torsion sera donné par :

$$\mathbf{W_{\alpha_1\to\alpha_2}(C) = \frac{1}{2}C.\alpha_1^{\ 2} - \frac{1}{2}C.\alpha_2^{\ 2} = \frac{1}{2}C.(\alpha_1^{\ 2} - \alpha_2^{\ 2})}$$

donc W>0 si $\alpha_2<\alpha_1$ (la barre revient vers sa position d'équilibre)
et W<0 si $\alpha_2>\alpha_1$ (la barre s'éloigne de sa position d'équilibre)

3- Puissance d'un couple de force

Rappel : la puissance est donnée par la relation $\mathbf{P = \dfrac{W}{t}}$

Dans le cas étudié ici, nous aurons : $\mathbf{P = \dfrac{M(C).\Delta\alpha}{\Delta t}}$ **donc** $\boxed{\mathbf{P = M(C).\omega}}$

N.B. : Pour un mouvement de translation nous avions: $\mathbf{P} = \vec{F}\,.\,\vec{v}$

4- Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé du théorème de l'énergie cinétique :
La variation d'énergie cinétique ΔE_c d'un solide, entre 2 instants t_1 et t_2, est égale à la somme des travaux $\Sigma\ W(\ )$ des <u>forces extérieures</u> agissant sur le solide entre ces 2 instants.

$$\boxed{\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F}_{ext})}$$

Dans le cas d'un solide en rotation par rapport à un axe Δ, l'expression sera :

$$\boxed{\Delta E_c = 1/2 J_\Delta \omega_f^2 - 1/2 J_\Delta \omega_i^2 = \Sigma M(\vec{F}_{ext}).(\alpha_f - \alpha_i)}$$

REM.1 : Si un système est formé de parties en translation et en rotation, le théorème de l'énergie cinétique est toujours valable, il s'écrit :

$$\underbrace{(1/2\ J_\Delta \omega_f^2 + 1/2 m v_f^2)}_{E_c \text{ finale totale}} - \underbrace{(1/2 J_\Delta \omega_i^2 + 1/2 m v_i^2)}_{E_c \text{ initiale totale}} = \Sigma W(\vec{F}_{ext})$$

REM. 2 : Le théorème de l'énergie cinétique est très utile pour calculer des vitesses angulaires, et aussi pour calculer des accélérations angulaires et linéaires.

COMPLEMENTS sur la ROTATION D'UN SOLIDE

1- Volant d'inertie

Définition. : Pièce en rotation ayant un grand moment d'inertie. Cette pièce sert à emmagasiner de l'énergie.
Un volant d'inertie sert à stocker de l'énergie sous forme mécanique (énergie cinétique de rotation)

Ex. : - petite voiturette (jouet)
- Un volant d'inertie sert aussi à rendre + régulière la vitesse de rotation d'une machine soumise à des efforts variables.
- Volant d'inertie dans un laminoir

2 - Moment cinétique ou moment angulaire

Le moment cinétique est l'équivalent de la quantité de mouvement (qdm) pour la rotation

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = J_\Delta\, \omega}$$

Propriété importante : nous avons vu que la qdm d'un système pseudo-isolé ne varie pas.
De même **le moment cinétique d'un système pseudo-isolé est conservé**.

Démonstration :

$$\mathbf{M(\vec{F}) = J_\Delta . \ddot{\alpha} = J_\Delta \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(J_\Delta.\omega)}{\Delta t}}$$

Le système étant pseudo-isolé => $\mathbf{M(\vec{F}) = 0}$

$$\mathbf{\frac{\Delta(J_\Delta.\omega)}{\Delta t} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_\Delta\, \omega = \text{Cste.}}$$

REM : Pour un système en rotation autour d'un axe Δ nous venons de montrer que

$$\mathbf{M(\vec{F}) = \frac{\Delta(J_\Delta.\omega)}{\Delta t}} \quad \textbf{donc} \quad \boxed{\mathbf{M(\vec{F}) = \frac{\Delta L}{\Delta t}}}$$

Nous avons là une autre expression de la **relation fondamentale de la dynamique pour un solide en rotation** :

$$\mathbf{M_\Delta(\vec{F}) = \frac{\Delta L}{\Delta t}}$$

Cette relation est aussi appelée "**Théorème du moment cinétique**"

N.B. : Cette expression correspond à $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$ pour un mouvement de translation

Cas particulier : Si **M(**$\vec{F}$**)** = 0 (système pseudo-isolé en rotation) alors $J_\Delta\omega$ = Cste
Le moment cinétique est donc constant.

REM. : Moment cinétique constant veut dire :
- la **valeur** ω de la vitesse angulaire est constante et
- l'orientation de l'axe de rotation ne change pas

Applications et conséquences pratiques :

- C'est grâce à cette propriété, qu'on peut être en équilibre sur un vélo (ou un deux-roues en général) : dès qu'il y a rotation de la roue, il y a stabilité de l'axe de rotation (donc la roue va avoir tendance à tourner dans le même plan, d'où l'impression d'équilibre)

- les gyroscopes qui servent de référence pour la navigation dans les avions ou les bateaux.

- la toupie : belle illustration de la stabilité dynamique de l'axe de rotation.

- expérience du tabouret tournant : on met en rotation une personne assise sur le tabouret : lorsqu'elle écarte les bras, le moment cinétique augmente donc ω diminue et lorsqu'on replie les bras, le moment cinétique diminue donc ω augmente, pour que $J_\Delta\omega$ reste constant.