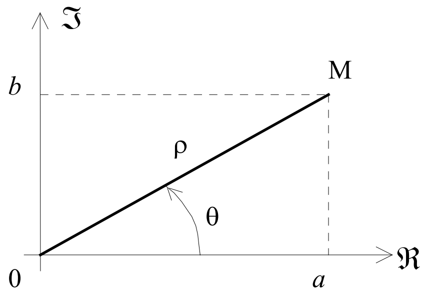
CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL

1 - NOTATION COMPLEXE : rappels mathématiques

1.1 Définitions



On associe au point M du plan $(\Re;\Im)$ un ***nombre complexe z*** :

- M est *l'image* du nombre complexe *d'affixe* z
- l'abscisse a représente sa partie ***réelle***
- l'ordonnée b représente sa partie ***imaginaire***.
- ρ est le ***module*** de z et θ son ***argument***

1.2 Expressions du nombre complexe

- *forme algébrique* (ou rectangulaire) : $z = \mathrm{a} + j\,\mathrm{b}$
- *forme trigonométrique* (ou polaire) : $z = [\rho\ ;\ \theta]$

N.B. on utilisera également l'écriture *exponentielle* : $z = \rho\, e^{j\theta}$

$$z = a + j\,b = \rho\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$$

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

1.3 Opérations sur les nombres complexes

Soit deux nombres complexes $z_1 = a_1 + j\,b_1 = [\rho_1 ; \theta_1]$ et $z_2 = a_2 + j\,b_2 = [\rho_2 ; \theta_2]$

- *somme* : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$
- *produit* : $z_1 \times z_2 = [\rho_1 \times \rho_2 ; \theta_1 + \theta_2]$
- *quotient :* $\dfrac{z_1}{z_2} = \left[\dfrac{\rho_1}{\rho_2} ; \theta_1 - \theta_2\right]$

1.4 Nombres complexes remarquables

- Deux nombres complexes ***conjugués*** ont la *même partie réelle* et des *parties imaginaires opposées* : soit $z = a + j\,b$; son conjugué est $z^* = a - j\,b$

- j est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle et la partie imaginaire égale à 1

$$j = [1, +\pi/2] \qquad j^2 = -1 \qquad \frac{1}{j} = -j$$

2 - NOMBRE COMPLEXE ASSOCIE A UNE GRANDEUR SINUSOIDALE

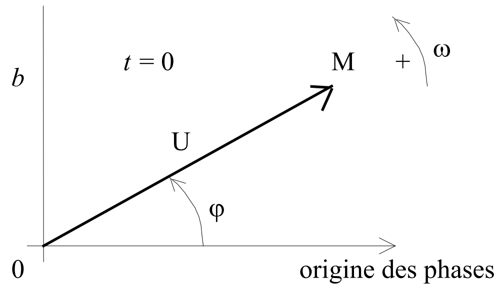
Considérons un signal électrique *sinusoïdal* représenté par la tension $u(t)$ ou le courant d'intensité $i(t)$.

Posons: $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$

U représente la *valeur efficace* de la tension , ω sa *pulsation* et φ sa *phase initiale*;

2.2 Représentation vectorielle (rappels 1ère)

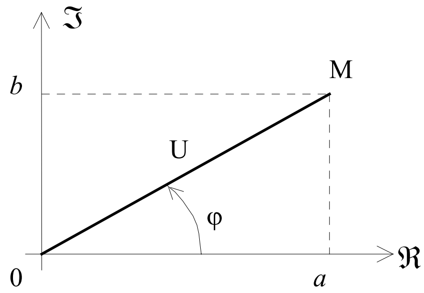
Afin de faciliter les calculs sur les fonctions sinusoïdales on associe à toute grandeur sinusoïdale un ***vecteur de Fresnel*** de module proportionnel à la valeur efficace (ou à la valeur maximale), tournant avec une vitesse angulaire constante de valeur ω.



2.3 Représentation complexe

Par analogie, si l'on repère le point M dans le plan complexe $(\Re;\Im)$, il est possible d'associer à la grandeur sinusoïdale $u(t)$ un ***nombre complexe*** noté $\underline{U}$ tel que : $\underline{U} = [U ; \varphi]$**.**

Le module représente donc la valeur efficace et l'argument la phase initiale.



Exemples :

$u_1 = 4\sqrt{2}\sin\omega t$ $\quad\quad$ $\underline{U}_1 = [4 ; 0]$

$u_2 = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\quad$ $\underline{U}_2 = [2 ; -\frac{\pi}{2}]$

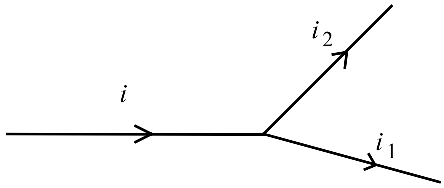
$u_3 = -5\sqrt{2}\cos\omega t$ $\quad\quad$ $\underline{U}_3 = [5 ; \pi]$

$u_4 = -4\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad\quad$ $\underline{U}_4 = [4 ; -\frac{2\pi}{3}]$

3 - LOI DES NŒUDS - LOI DES MAILLES

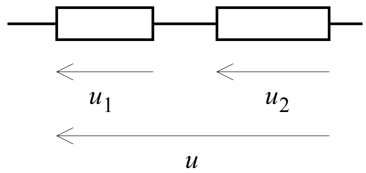
Les lois établies en continu s'appliquent directement aux valeurs instantanées.

Dans le cas des *circuits linéaires*, les propriétés des vecteurs et des nombres complexes permettent d'appliquer ces lois *en régime sinusoïdal* en utilisant soit la construction de Fresnel soit la représentation complexe :



$i = i_1 + i_2$

$\boxed{\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2}$



$u = u_1 + u_2$

$\boxed{\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2}$

Exercices

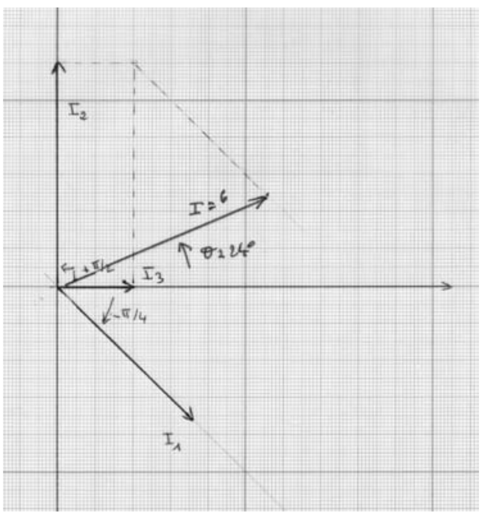
Ex1 - Calculer $i = i_1 + i_2$ avec $i_1 = 200\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $i_2 = 100\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \dfrac{7\pi}{6}\right)$

Réponses:

$\underline{I}_1 = [200; +\dfrac{\pi}{2}] = 200\,j$; $\underline{I}_2 = [100\,; +\dfrac{7\pi}{6}] = -50\sqrt{3} - 50\,j$; $\underline{I} = -50\sqrt{3} + 150\,j = [173; +\dfrac{2\pi}{3}]$

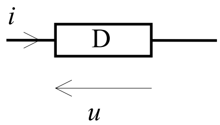
Ex2 - Calculer $i = i_1 + i_2 + i_3$ avec $i_1 = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $i_2 = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $i_3 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t)$ en utilisant la notation complexe et la construction de Fresnel

Réponse: $\underline{I} = [6{,}1; +0{,}42 \text{ rad}]$



4 - DIPOLES PASSIFS LINEAIRES

4.1 Impédance et Admittance (rappels 1ère)



Soit un dipôle D traversé par un courant d'intensité $i = \mathrm{I}\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_i)$ sous la tension $u = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_u)$. On appelle $\varphi = (\theta_u - \theta_i)$ la *différence de phase* entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$

Définitions :

Impédance : $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}}$, elle s'exprime en ohms (Ω)

Admittance : $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{\mathrm{Z}} = \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{U}}$, elle s'exprime en siemens (S)

Exemples : l'impédance d'un conducteur de résistance R est $Z_R = R$, celle d'un condensateur de capacité C est $Z_c = \dfrac{1}{C\omega}$ et celle d'une inductance pure (bobine de résistance nulle) $Z_L = L\omega$.

4.2 Impédance complexe

Par définition :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

$$\underline{Z} = \left[Z = \frac{U}{I} ; \varphi = \theta_u - \theta_i \right]$$

- *Module* de $\underline{Z}$: impédance Z (réelle)
- *Argument* de $\underline{Z}$: différence de phase entre u et i (ou *déphasage* de u par rapport à i)

Loi d'Ohm en régime sinusoïdal :

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \qquad \text{ou} \qquad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}}$$

2.3 Dipôles élémentaires (R, L, C)

Pour la suite posons :

$$i = \mathrm{I}\sqrt{2}\sin\omega t$$
$$u = \mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

En régime variable, les lois du continu s'appliquent aux valeurs instantanées

Conducteur de résistance R

Loi d'Ohm $\quad u = \mathrm{R}i$

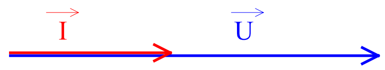
$$\mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{RI}\sqrt{2}\sin(\omega t)$$

En identifiant : $\underline{\mathrm{Z}}_{\mathrm{R}} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} = \mathrm{R}$ et $\quad \varphi = 0$

Conclusion : $\underline{\mathrm{Z}}_{\mathrm{R}} = \mathrm{R} = [\mathrm{R}\ ;\ 0]$

$\mathrm{U} = \mathrm{R\,I}$ *ou* $\mathrm{I} = \mathrm{G\,U}$

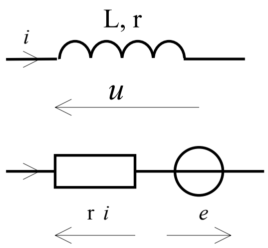
$\varphi = 0$



Inductance pure L (r = 0)

Rappel

Bobine



$u = \mathrm{r}\,i - e$

$$\boxed{e = -\mathrm{L}\frac{di}{dt}}$$

Loi d'Ohm $\quad u = \mathrm{r}i - e = +\mathrm{L}\dfrac{di}{dt}$

$$\mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{L\omega I}\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

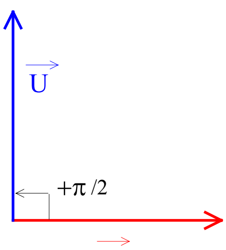
$$\mathrm{U}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{L\omega I}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

En identifiant : $\underline{\mathrm{Z}}_{\mathrm{L}} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} = \mathrm{L\omega}$ et $\quad \varphi = +\dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $\underline{\mathrm{Z}}_{\mathrm{L}} = j\mathrm{L\omega} = [\mathrm{L\omega}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}]$

$\mathrm{U} = \mathrm{L\omega\,I}$

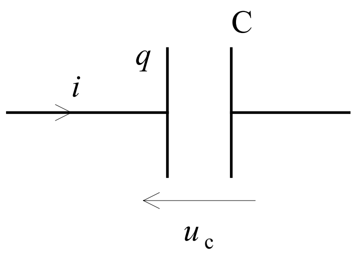
$\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$



Condensateur parfait de capacité C

Rappel

Condensateur



$q = C\, u_c$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$

$$\boxed{i = C\frac{du_c}{dt}}$$

Loi d'Ohm

$$i = C\frac{du}{dt}$$

$$I\sqrt{2}\sin(\omega t) = C\omega U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

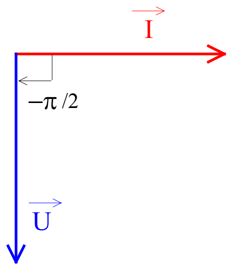
$$I\sqrt{2}\sin(\omega t) = C\omega U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

En identifiant : $\underline{Z}_C = \dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{C\omega}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $\underline{Z}_C = -\dfrac{j}{C\omega} = \dfrac{1}{jC\omega} = [\dfrac{1}{C\omega};\ -\dfrac{\pi}{2}]$

$$U = \frac{1}{C\omega}\, I$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$



Exercices

Ex 1 - Un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ = 3000 j est traversé par un courant de valeur complexe $\underline{I}$ = [25 (mA); +π/6].

- calculer la valeur complexe $\underline{U}$ de la tension aux bornes du dipôle.

Réponse : $\underline{U}$ = [75 (V); 2π/3]

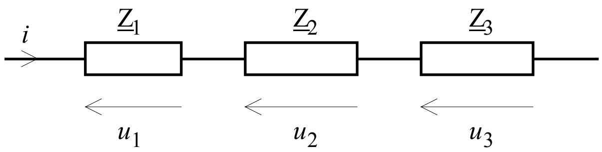
Ex 2 - Une bobine d'inductance L = 1 H et de résistance négligeable (r = 0) est soumise à une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 220 V, de fréquence f = 50 Hz.

- Calculer son impédance complexe $\underline{Z}$ et son admittance complexe $\underline{Y}$.
- Calculer l'intensité complexe $\underline{I}$ avec la tension $\underline{U}$ = [U; 0] comme origine des phases

Réponse : $\underline{Z}$ = 314 j ; 314 j ; $\underline{Y}$ = -3,18×10^{-3} j

5 - ASSOCIATION DE DIPOLES PASSIFS

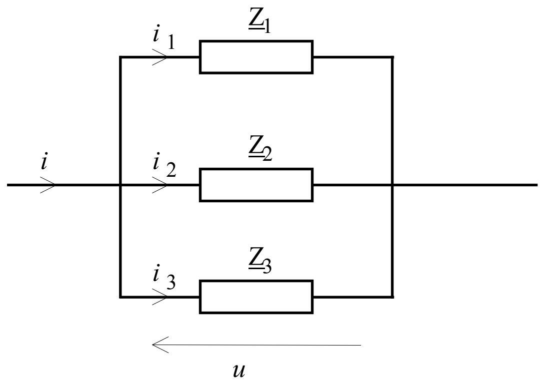
5.1 En série



$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\,\underline{I}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

5.1 En parallèle

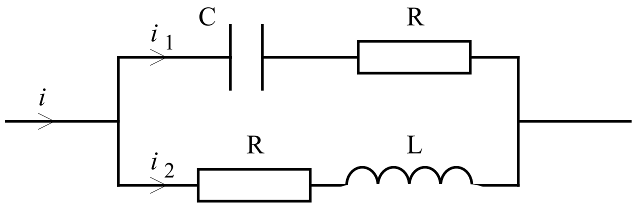


$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\,\underline{U}$$

$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \quad ou \qquad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

Exercices

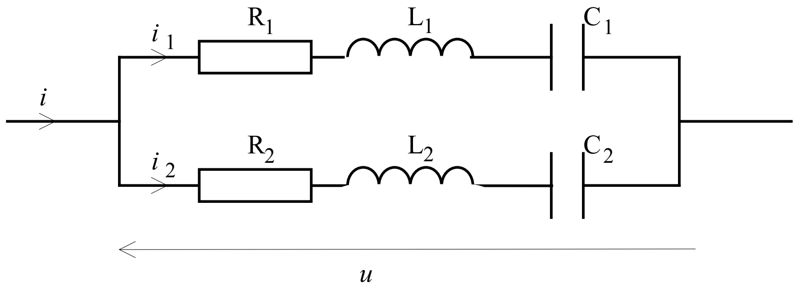
Ex 1 - Exprimer l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}_E$ du dipôle suivant :



- A quelle condition cette impédance complexe est-elle réelle ?
- En déduire sa valeur lorsque cette condition est remplie.

Réponses : $\underline{Z}_E = (\underline{Z}_C + \underline{Z}_R) \,//\, (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L)$; $\underline{Z}_E$ réelle si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$; alors $\underline{Z}_E = R$.

Ex 2 - Le circuit ci-dessous est alimenté sous la tension sinusoïdale $u = 220\sqrt{2}\cos\omega t$, de fréquence f = 50 Hz.



On donne :

$R_1 = 50\ \Omega$; $L_1\omega = 100\ \Omega$; $\dfrac{1}{C_1\omega} = 70\ \Omega$

$R_2 = 30\ \Omega$; $L_2\omega = 10\ \Omega$; $\dfrac{1}{C_2\omega} = 60\ \Omega$

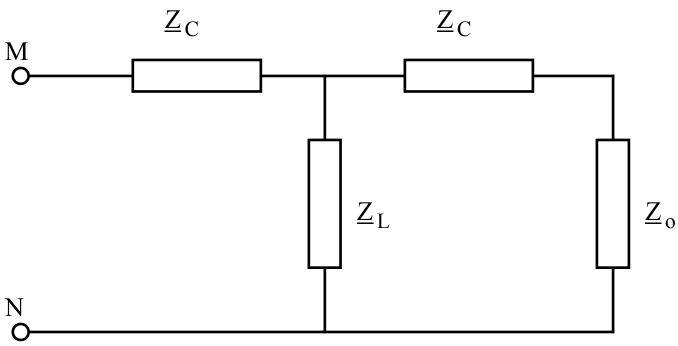
- Calculer les impédances complexes $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ des deux branches, puis l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}$ de l'ensemble.
- Calculer les intensités complexes $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$, puis l'intensité complexe $\underline{I}$ dans la branche principale
- En déduire les expressions des valeurs instantanées $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

Réponses :

$\underline{Z}_1 = 50 + 30\,j$; $\underline{Z}_2 = 30 - 50\,j$; $\underline{Z} = 40 - 10\,j$

$\underline{I}_1 = [3{,}77\ ;\ -0{,}54]$; $\underline{I}_2 = [3{,}77\ ;\ +1{,}03]$; $\underline{I} = [5{,}33\ ;\ +0{,}245]$

Ex 3 - Calculer l'impédance complexe équivalent $\underline{Z}_{MN}$ du dipôle MN

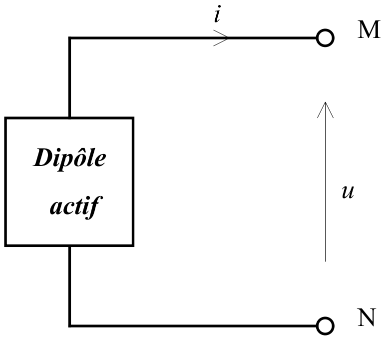


- En déduire l'expression de l'impédance $\underline{Z}_o$ telle que $\underline{Z}_o = \underline{Z}_{MN}$
- Exprimer $\underline{Z}_o$ en fonction de R, L et C
- A quelle condition $\underline{Z}_o = R_o$ est-elle réelle ?

Réponses : $\underline{Z}_o^2 = \underline{Z}_C\,(\underline{Z}_C + 2\,\underline{Z}_L)$; $\underline{Z}_o^2 = 2\dfrac{L}{C} - \dfrac{1}{C^2\omega^2}$; $\omega \geq \sqrt{\dfrac{1}{2LC}}$

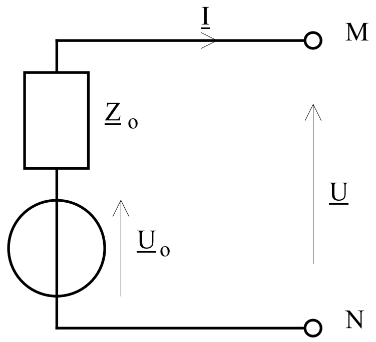
6 - THEOREME DE THEVENIN -THEOREME DE NORTON (rappels 1ère)

Un dipôle _actif_ et _linéaire_ peut être remplacé par un modèle équivalent de ***Thévenin*** (*modèle série*) ou de ***Norton*** (*modèle parallèle*). Les modèles équivalents ont la même caractéristique externe $u = f(i)$ que le dipôle



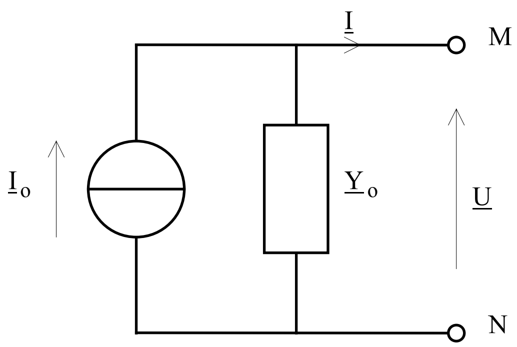
En régime sinusoïdal, nous utiliserons la notation complexe

6.1 Modèle de Thévenin (M.E.T.)



- ***fem $\underline{U}_0$ égale à la tension à vide aux bornes du dipôle***
- ***impédance interne $\underline{Z}_0$ égale à l'impédance vue des bornes du dipôle lorsque toutes les sources sont éteintes.***

6.2 Modèle de Norton (M.E.T.)



- ***source de courant d'intensité $\underline{I}_0$ égale à celle du courant de court-circuit du dipôle***
- ***admittance interne $\underline{Y}_0$ égale à l'admittance vue des bornes du dipôle lorsque toutes les sources sont éteintes.***

6.3 Caractéristique courant-tension

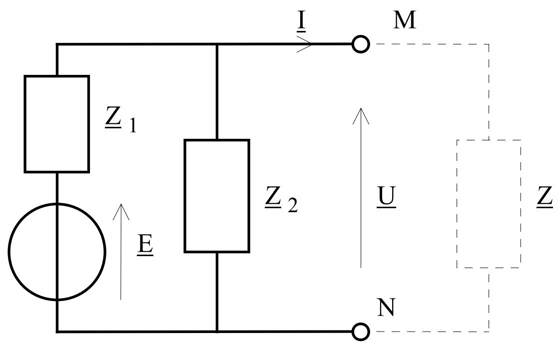
Les deux modèles étant équivalents, on peut donc écrire l'équation de la caractéristique externe sous la forme $u = f(i)$ avec le M.E.T ou sous la forme $i = f(u)$ avec le M.E.N

- $\underline{U} = \underline{U}_o - \underline{Z}_o\,\underline{I}$ à partir du modèle de Thévenin
- $\underline{I} = \underline{I}_o - \underline{Y}_o\,\underline{U}$ à partir du modèle de Norton

On en déduit les relations : $\underline{Z}_o = \dfrac{1}{\underline{Y}_o}$ et $\underline{U}_o = \underline{Z}_o\,\underline{I}_o$

Exercices : *tous les circuits fonctionnent en régime sinusoïdal*

Ex 1

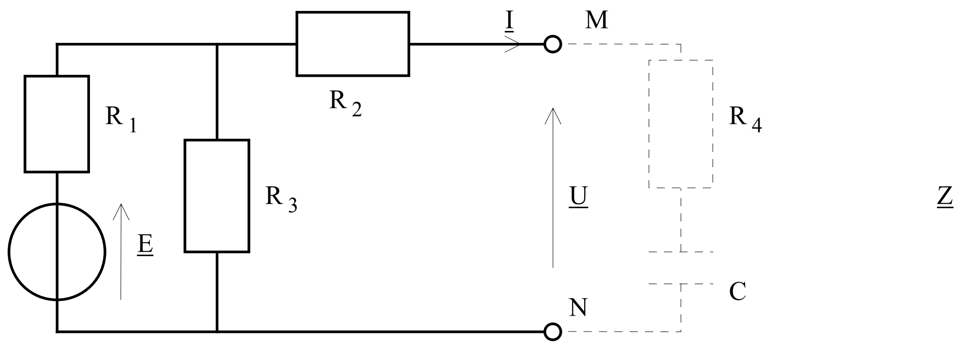


$\underline{E} = [120\ (V)\ ;\ 0]$; $f = 50$ Hz ;
$\underline{Z}_1 = jL\omega$ avec L = 12,8 mH ; $\underline{Z}_2 = 1/jC\omega$ avec C = 50 µF ; $\underline{Z} = 5 + 4j$

- Calculer les éléments $\underline{U}_o$ et $\underline{Z}_o$ du MET du dipôle MN
- En déduire la valeur du courant $\underline{I}$ dans $\underline{Z}$.

Réponses : $\underline{Z}_o = +4{,}29j$; $\underline{U}_o = 128$ (V) ; I = 6,8 - 11,3j = [13,2 ; -1,03]

Ex 2 - Mêmes questions avec le circuit suivant:

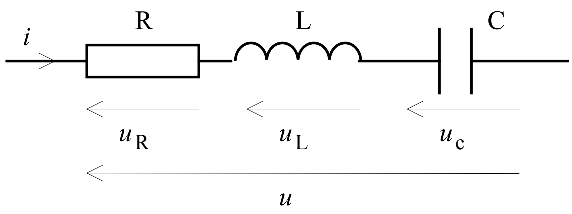


E = 50 V ; ω = 5000 rad.s^{-1} ;
$R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = 210\ \Omega$; $R_3 = 50\ \Omega$; $R_4 = 50\ \Omega$; C = 2 µF

Réponses : $\underline{Z}_o = 250$ (Ω); $\underline{U}_o = 10$ (V) ; I = [31,6 (mA) ; 0,322]

7 - CIRCUITS R.L.C. SERIE

On alimente le circuit RLC série en régime sinusoïdal de fréquence *f* variable, sous tension *u*(*t*) de valeur efficace U constante.



7.1 Impédance

$$\underline{Z} = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}$$

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + j\,X$$

$$\text{\underline{\textit{Module}}}\ \textbf{:}\ Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{\underline{\textit{Argument}}} :\ \tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

N.B. : $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ est la ***réactance*** du circuit, elle s'exprime en ohms

7.2 Résonance d'intensité

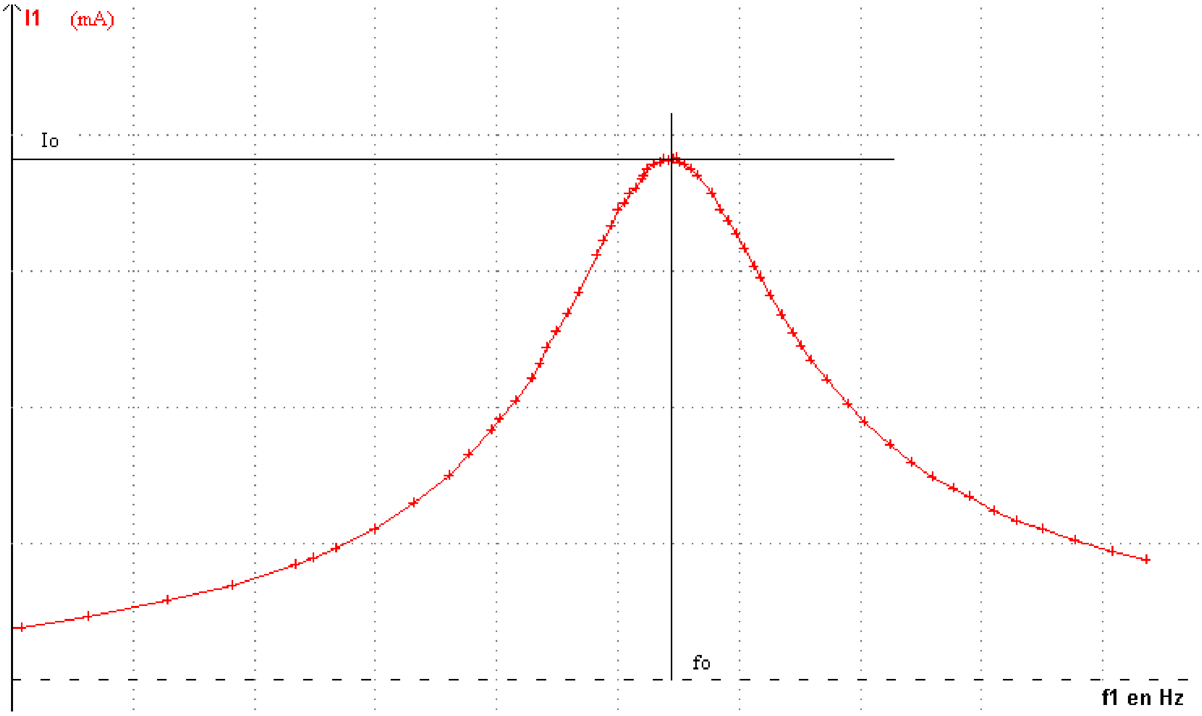
La valeur complexe du courant s'exprime par la relation : $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \dfrac{\underline{U}}{R + jX}$.

Sa valeur efficace I (module de $\underline{I}$) est donc égale à : $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

Le montage étant alimenté sous la tension efficace U constante, l'intensité efficace I varie donc avec la fréquence *f*. Elle passe par un ***maximum*** I_o lorsque l'impédance Z est minimale, c'est -à-dire lorsque la réactance X est nulle, le circuit est alors en ***résonance***.

Condition de résonance : $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ ou $LC\omega^2 = 1$

7.3 Courbe de résonance



7.4 Propriétés du circuit à la résonance

- *fréquence de résonance* : $f_o = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- *impédance* $Z_o = R$
- *intensité efficace* $I_o = \dfrac{U}{R}$

Le circuit est donc résistif, le *courant i et la tension u sont en phase*. Les tensions u_L aux bornes de la bobine et u_c aux bornes du condensateur sont en *opposition de phase* et leurs valeurs efficaces sont égales :

$$L\omega_o I_o = \frac{1}{C\omega_o} I_o$$

$Q = \dfrac{U_{co}}{U}$ est le coefficient de *surtension* aux bornes du condensateur à la résonance :

$$Q = \frac{I_o}{U C\omega_o} = \frac{1}{RC\omega_o} = \frac{L\omega_o}{R}$$

Par définition on appelle *Q* ***facteur de qualité*** du circuit RLC.

7.5 Acuité de la résonance : bande passante

Par *définition* on appelle ***bande passante*** à-3 dB, la bande de fréquences telle que $I \geq \frac{I_o}{\sqrt{2}}$.

N.B. : $G = 20 \log \frac{I}{I_o}$ ou ***gain*** (en dB) vaut G = -3 dB lorsque $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$

- Recherchons les fréquences f_1 et f_2 telles que $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$ (*fréquences de coupure* à -3 dB)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{ et } I_o = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} \qquad \Rightarrow \qquad X^2 = R^2$$

- On trouve donc *deux solutions* :

$X_1 = L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = +R$	alors $X_1 > 0$;	le circuit est *inductif* :	$\varphi_1 = +\pi/4$ ($f_1 > f_o$)
$X_2 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} = -R$	alors $X_2 < 0$;	le circuit est *capacitif* :	$\varphi_1 = -\pi/4$ ($f_2 < f_o$)

$X^2 = R^2$ ou $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$

$LC\omega^2 - 1 = \pm RC\omega$ ou $LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$ (*2 équations du second degré*)

$\Delta = R^2C^2 + 4\,LC > 0$

(2×2 racines, *seules les racines positives sont "physiquement" valables, la pulsation est un nombre positif*)

- ***solutions*** : $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega_2 = 2\pi f_2 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$
- Largeur de la ***bande passante*** :

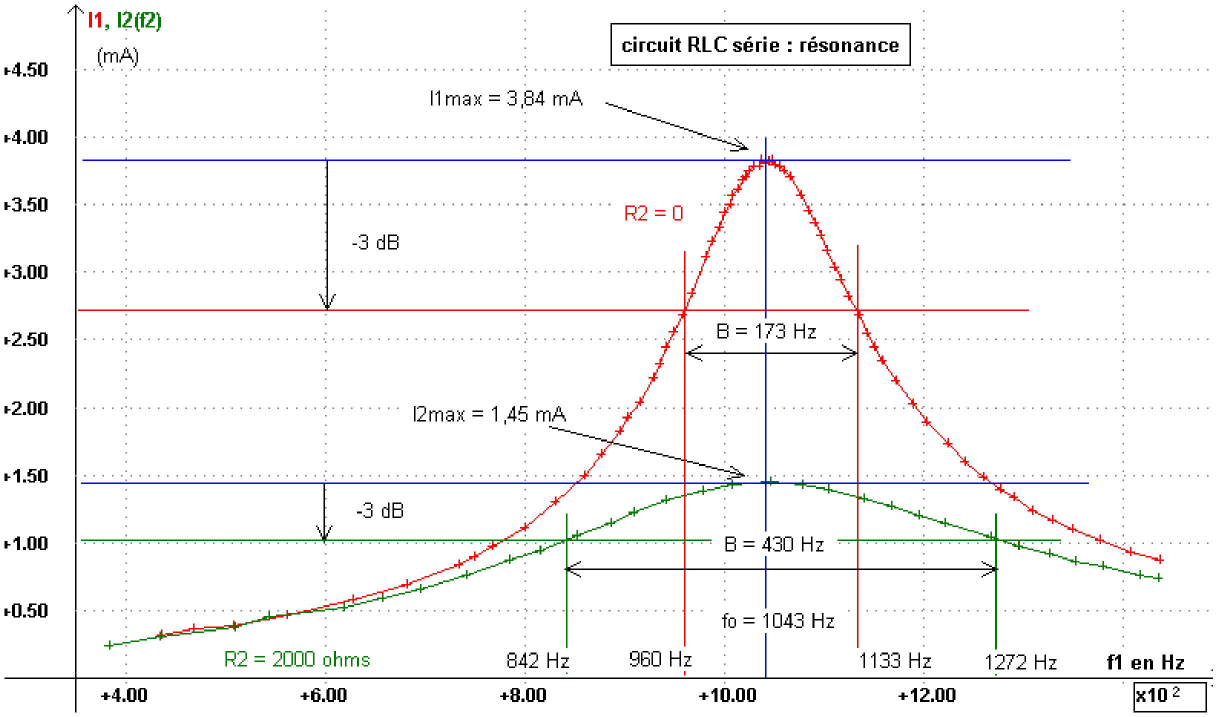
$$\boxed{\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L} \text{ ou } \Delta f = f_1 - f_2 = \frac{R}{2\pi L}}$$

- Bande passante relative : $\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{R}{L\omega_o} = R \times \frac{1}{Q}$

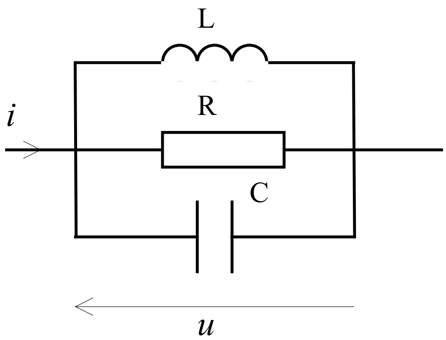
$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{\Delta f}{f_o} = \frac{1}{Q}}$$

Le *facteur de qualité* Q caractérise donc l'acuité de la résonance.

Exemple : influence de la résistance du circuit



Exercice : *circuit résonant parallèle*



- Exprimer l'admittance complexe $\underline{Y}$ du circuit RLC parallèle alimenté sous la tension sinusoïdale u de valeur efficace constante U.
- En déduire l'expression de l'intensité efficace I dans la branche principale.
- Montrer que I passe par un minimum I_o pour une valeur f_o de la fréquence.
- Que devient ce minimum lorsque R est infinie ?

Réponses :

$\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right) = G + j\,B$ avec G (*conductance*) et B (*susceptance*) en siemens (S)

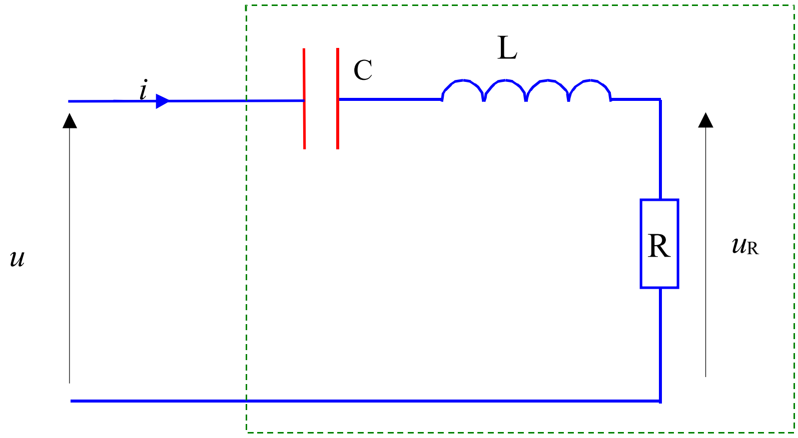
$I = U\sqrt{G^2 + B^2}$

$I_o = G.U$ lorsque $B = 0$ soit $L\omega_o = \dfrac{1}{C\omega_o}$ ou $LC\,\omega_o^2 = 1$

R infinie, alors $I_o = 0$ (*circuit bouchon*)

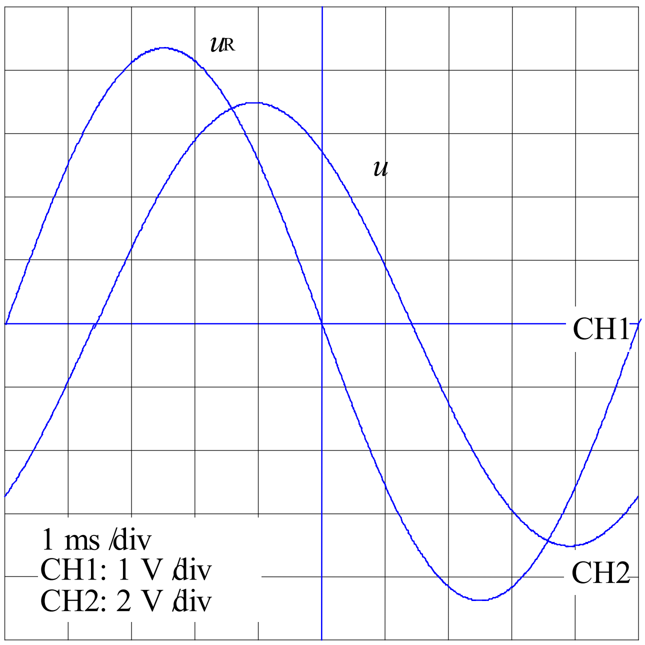
EXERCICE : *circuit RLC série*

Un dipôle D est constitué par l'association en série d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ce dipôle est alimenté par la tension sinusoïdale u de pulsation ω.



1. La fréquence de la tension u est fixe

On visualise les tensions u et u_R à l'oscilloscope. Pour une certaine fréquence f, on obtient les oscillogrammes ci-dessous.



En déduire :

- Le déphasage de u par rapport à u_R.
- La valeur efficace U de la tension u.

On mesure à cette fréquence les valeurs efficaces des tensions aux bornes des dipôles :

$$U_R = 3{,}08 \text{ V} ; U_L = 0{,}97 \text{ V} ; U_c = 4{,}91 \text{ V}$$

- Représenter les vecteurs de Fresnel associés aux tensions instantanées u_R, u_L et u_c en prenant le courant *i* comme origine des phases (*échelle :* 2 cm pour 1 V).
- En déduire la valeur efficace de la tension d'alimentation *u* et la valeur du déphasage φ de la tension *u* par rapport à l'intensité *i* du courant.

Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle D en fonction de R, L, C et ω.

- Exprimer son module et son argument.
- Quel est le déphasage φ introduit par le dipôle entre *u* et *i* ?

A.N. : On donne R = 1 kΩ ; L = 0,5 H ; C = 1 µF et *f* = 100 Hz.

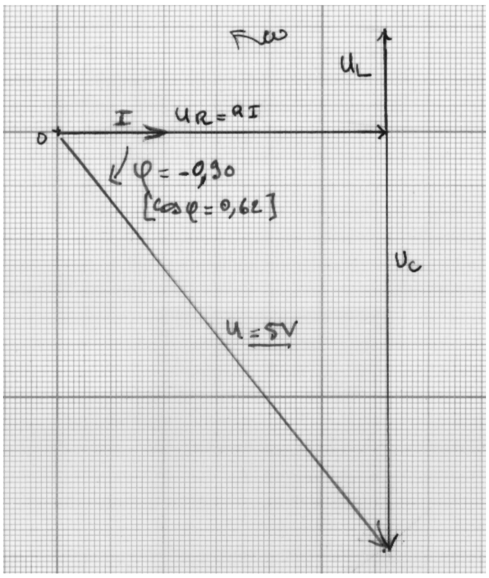
2. La fréquence de la tension u est variable

On mesure, pour différentes fréquences de la tension *u*, la tension efficace U_R et l'avance de phase φ de la tension *u* par rapport au courant *i*.
Les résultats expérimentaux sont donnés en annexe.

- Relever la fréquence de résonance f_o.
- Déterminer la valeur efficace I_o de l'intensité du courant à la résonance.
- Déterminer les fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles la tension U_R est celle de la résonance divisée par $\sqrt{2}$.
- Préciser la nature résistive, inductive ou capacitive du circuit en fonction de la valeur de la fréquence.

Réponses

$\varphi_{u/i} = -0{,}9$ rad (*u* en retard par rapport à u_R) ; $U_{max} = 7$ V et $U_{eff} = 5$ V V



Fresnel : U = 5 V ; $\varphi_{u/i}$ = - 0,9 rad

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) ;$$

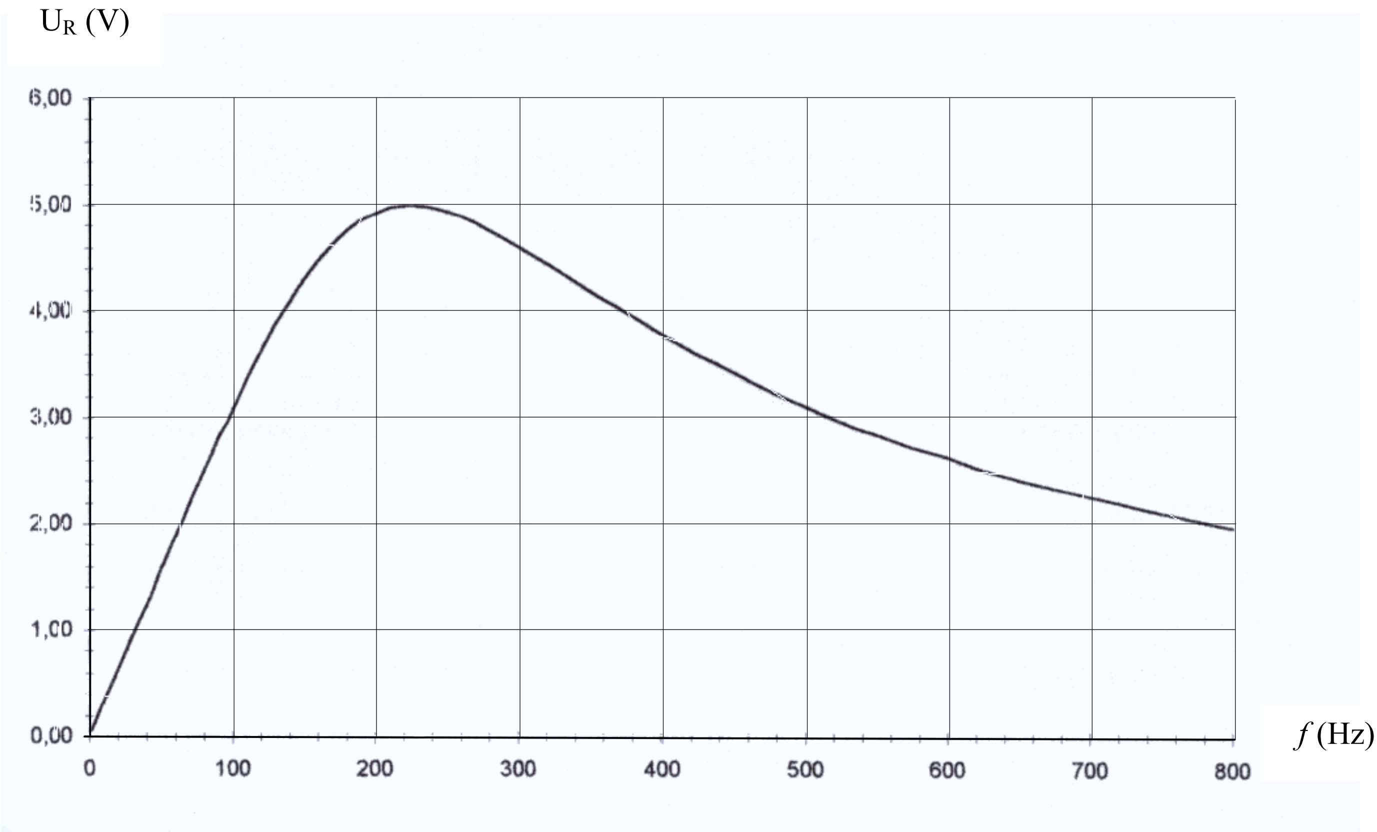
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} ;$$

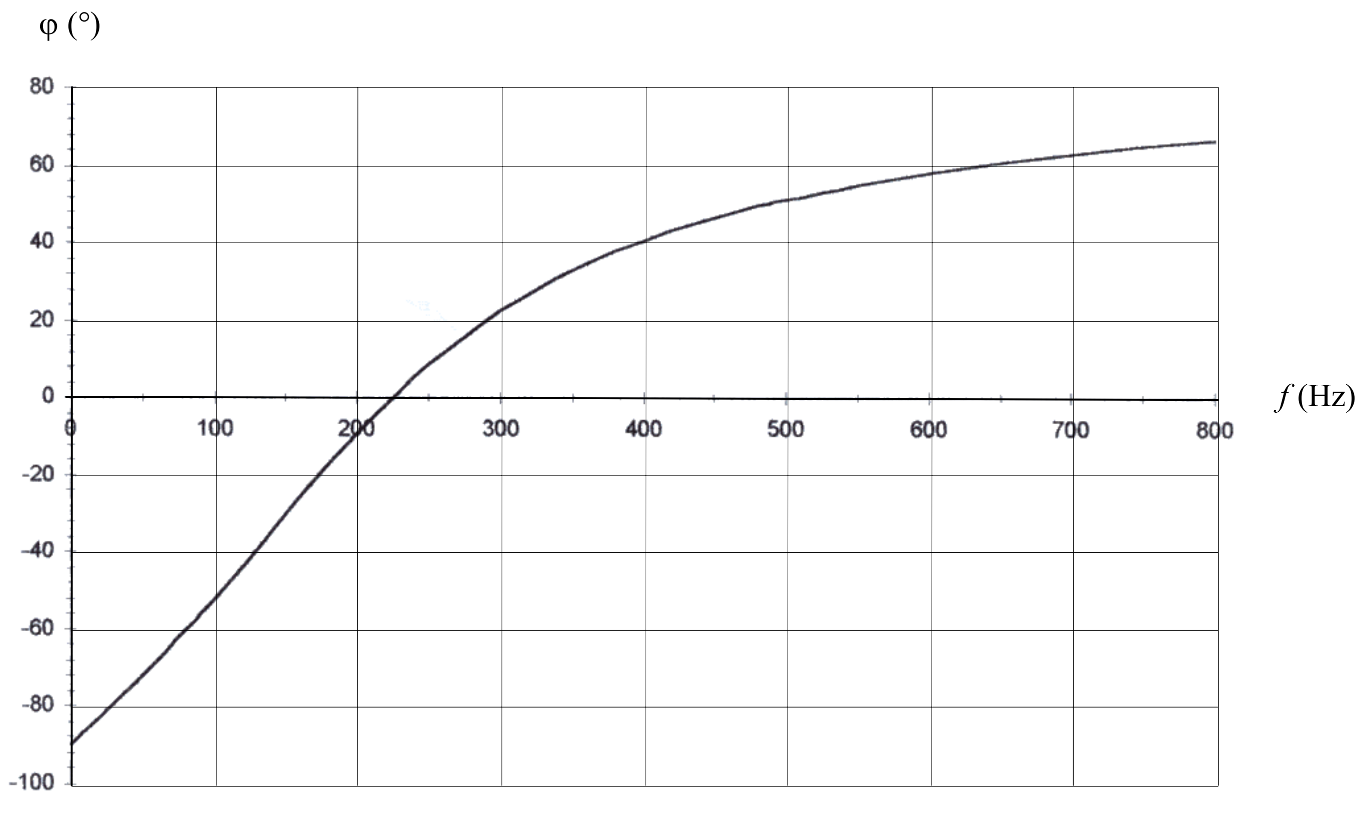
$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ et } \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Z = 1622 Ω ; X = -1277 Ω ; $\varphi_{u/i}$ = -0,906 rad

f_o = 225 Hz (résistif) ;
f_1 = 115 Hz (capacitif) ; f_2 = 430 Hz (inductif)

ANNEXE


UR (V)
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
0
100
200
300
400
500
600
700
800
f (Hz)


φ (°)
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
100
200
300
400
500
600
700
800
f (Hz)